

TD n°15 - Induction

Exercice 1 Arbres binaires parfaits

On considère des arbres **non-étiquetés** uniquement.

1. Dessiner un arbre binaire parfait de hauteur 3.
2. Dans un arbre parfait, que peut on remarquer sur les sous-arbres gauches et droits de la racine?
3. En déduire une définition inductive pour l'ensemble des arbres binaires parfaits. (seulement 1 élément de base et 1 constructeur d'arité 1 sont nécessaires)
4. Prouver par induction structurelle que pour tout arbre parfait a , on a $n(a) = 2^{h(a)+1} - 1$ avec $n(a)$ le nombre de sommets de l'arbre et $h(a)$ sa hauteur.

Exercice 2 Un ensemble de mots

On définit Σ l'ensemble des lettres de l'alphabet latin.

On considère l'ensemble $\mathcal{T}$ défini récursivement par $\mathcal{B} = \Sigma$ et $\mathcal{C} = \{f_\alpha : m \mapsto \alpha m \alpha \mid \forall \alpha \in \Sigma\}$ (ce qui veut dire qu'on a 26 constructeurs). Dans cet exemple, les termes construits sont des mots.

1. Les mots suivants appartiennent-ils à $\mathcal{T}$? Si oui, comment peut on les définir avec les éléments de la base et les constructeurs. $a, dce, dcd, bbbb, bbebb$.
2. Montrer par induction structurelle que tous les mots dans $\mathcal{T}$ sont de longueur impaire.
3. Montrer également que tout mot de $\mathcal{T}$ est un palindrome. Pour rappel, une chaîne de caractères $s_0 s_1 \dots s_n$ est un palindrome si et seulement si pour tout $i \in [0, n]$, $s_i = s_{n-i}$

Exercice 3 Mots bien parenthésés

Dans cet exercice on considère des mots (ou suites de lettres) constitués uniquement de symboles dans $\Sigma = \{a, b, \dots, y, z, (,)\}$.

On note Σ^* l'ensemble de tous le mots de taille finie qu'on peut créer avec ces symboles.

On définit par induction l'ensemble $\mathcal{T}$ des mots bien parenthésés par : $\mathcal{B} = \{\epsilon\} \cup \{\lambda \mid \lambda \text{ une lettre qui n'est pas une parenthèse}\}$, où ϵ représente un mot vide (qui a 0 lettres) et $\mathcal{C} = \{Par : u \in \Sigma^* \mapsto (u); Concat : u, v \in \Sigma^* \mapsto uv\}$.

Autrement dit les éléments de base sont tous les mots de longueur 0 ou 1 (qui ne contiennent pas les parenthèses) et les constructeurs sont : "ajouter des parenthèses autour d'un mot" et "concaténer deux mots".

1. Les mots suivants sont-ils bien parenthésés? Donner leur expression en fonction des constructeurs et des éléments de base. $ab, (a), (a, (a(b)), ((bb(b)b(bb)bb)))$.
2. Montrer que la définition inductive de cet ensemble est ambiguë.

On définit sur $\mathcal{T}$ une fonction de poids sur les lettres de la manière suivante (on rappelle que les parenthèses sont des lettres) :

$$\begin{aligned} p(()) &= 1 \\ p()) &= -1 \\ \forall x \in \Sigma \text{ si } x \neq (\text{ et } x \neq) , p(x) &= 0 \end{aligned}$$

Et on étend la définition de p aux mots dans Σ^* par : si $u = u_1 u_2 \dots u_n$ avec $\forall i \in [1, n]$, $u_i \in \Sigma$, alors $p(u) = p(u_1) + p(u_2) + \dots + p(u_n)$. En particulier on fixe $p(\epsilon) = 0$.

3. Montrer par induction structurelle que tout mot bien parenthésé u vérifie :

- a) $p(u) = 0$
- b) si v est un préfixe de u , alors $p(v) \geq 0$.

4. Montrer réciproquement que si $u \in \Sigma^*$ satisfait ces propriétés, alors u est dans $\mathcal{T}$.
5. En déduire un algorithme permettant de tester si un mot est bien parenthésé.

Exercice 4 Transformation d'arbres binaire

On considère une fonction f définie sur les couples d'arbres binaires non étiquetés comme suit :

$$\text{Pour tout } a \text{ arbre binaire, } f(\text{Vide}, a) = a$$

Pour tout a_1, a_2, a_3 arbres binaires, $f(N(a_1, a_2), a_3) = f(a_1, N(a_3, a_2))$

On pourra remarquer que la fonction est définie par induction sur la première variable : il n'y a aucune différence avec la définition inductive d'une fonction de une variable.

1. On définit l'arbre $a = N(N(N(Vide, Vide), N(N(Vide, Vide), Vide)), N(Vide, Vide))$. Dessiner l'arbre a puis appliquer f à $(a, Vide)$.
2. Montrer que le calcul de la fonction f termine quels que soient les arbres fournis en argument
3. Soit $b = f(a, Vide)$. Calculer $f(b, Vide)$. Que remarquez-vous?
4. Montrer que pour tout arbre a , $f(f(a, Vide), Vide) = a$.
Indication : On pourra montrer par induction structurelle la propriété suivante : pour tout arbre a , pour tout arbre b , $f(f(a, b), Vide) = f(b, a)$.

Exercice 5 Des définitions de fonctions

Dans cet exercice on considère les entiers de Péano et les listes définies inductivement comme dans le cours.

Définir inductivement les fonctions suivantes :

1. la multiplication sur les entiers de Péano.
2. la fonction factorielle sur les entiers de Péano.
3. la fonction miroir qui renverse une liste.
4. la fonction max qui calcule le maximum d'une liste.

Exercice 6 Ordres bien fondés

1. Montrer que l'ordre lexicographique sur $\mathbb{N}^k$ (les k -uplets) pour $k \in \mathbb{N}$ est un ordre bien fondé.
2. Montrer la propriété suivante pour $\geq$ une relation d'ordre sur E : $\geq$ est bien fondée si et seulement si toute partie F de E admet un élément minimal.